PROPERTIES OF THE SPHERICAL MODULE OF A FAMILY OF CURVES

A. Novik, A.N. Malyutina

The paper is devoted to the study of properties and calculation of the spherical module of a family of curves, as well as to module's distorting under mappings with s-averaged characteristic.

Keywords: space module, space mapping, module of a family of curves.

УДК 517.982

ОБОБЩЕНИЕ L_1-ПОЛУНОРМ

Ан.Ан. Новиков[1], З.Ш. Холматова[2]

1 *a.hobukob@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *zamira.kholmatova@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается отображение, являющееся обобщением L_1-полунорм, ассоциированных с операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана, и весами, определенными на алгебре фон Неймана.

Ключевые слова: упорядоченное векторное пространство, порядок, некоммутативное интегрирование, двойственность.

Пусть K – порождающий конус в векторном пространстве E. Элемент f векторного пространства E будем называть положительным и писать $f \geq \vec{0}$, если $f \in K$. Также будем писать $f \geq g$, если $f - g \in K$.

Пусть частично упорядоченные векторные пространства E и F (с конусами положительных элементов E^+ и F^+ соответственно) находятся в двойственности $\langle E, F\rangle$ и согласованы в смысле порядка, т. е. если $x \in E^+, f \in F^+$, то $\langle x, f\rangle \geq 0$.

Определим

$$p(x,f) := \inf\left\{\langle x_1 + x_2, f_1 + f_2\rangle \;\middle|\; \begin{array}{c} x = x_1 - x_2,\ x_1, x_2 \in E^+ \\ f = f_1 - f_2,\ f_1, f_2 \in F^+ \end{array}\right\}.$$

Очевидно, что для любых $x \in E$, $f \in F$ выполняется неравенство $p(x,f) \geq 0$.

Предложение 1. *Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $f \in F$ выполняется равенство*

$$p(\lambda x, \mu f) = |\lambda||\mu| p(x,f).$$

В случае, если зафиксировать один из аргументов положительным, то относительно другого аргумента отображения $p(x,\cdot)$ и $p(\cdot,f)$ становятся полунормами [1–4].

Предложение 2. *Если $x \in E^+$, то*

$$p(x,f) = \inf\{(f_1+f_2)(x) \mid f = f_1 - f_2\} \quad \text{для любого } f \in F.$$

Аналогично, если $f \in F^+$, то $p(x,f) = \inf\{f(x_1) + f(x_2) \mid x = x_1 - x_2\}$ для любого $x \in E$.

Однако, в общем случае это свойство полунормальности не сохраняется. Обратим также внимание, на то, что при определенных условиях должны выполняться неравенства супераддитивности.

Предложение 3. *Для любых $x, y \in E^+$, $f \in F$*

$$p(x+y, f) \geq p(x, f) + p(y, f).$$

Аналогично, для произвольных $f, g \in F^+$ и $x \in E^+$ выполняется неравенство

$$p(x, f+g) \geq p(x, f) + p(x, g).$$

Следствие 1. *Для $x \in E^+$, $f \in F^+$ выполняется равенство $p(x, f) = \langle x, f \rangle$.*

Рассмотрим два примера, как работают указанные констркуции в конкретных пространствах.

Пример 1. Пусть $E = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $F = L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ с естественным порядком находятся в двойственности (для $x \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ двойственность определяется равенством $\langle x, f \rangle = \int\limits_\Omega f x d\mu$).

Для любых $x \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ верно равенство $p(x, f) = \langle |x|, |f| \rangle$. В этом случае для любых $x, y \in E$, $f, g \in F$ верны неравенства

$$p(x+y, f) \leq p(x, f) + p(y, f); \ p(x, f+g) \leq p(x, f) + p(x, g).$$

Пример 2. Пусть $E = F = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Порядок определим стандартно: $\mathbf{0} \leq A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\overline{A^t} = A$ и все собственные значения A положительны. Двойственность определяется равенством $\langle X, F \rangle = \mathrm{Tr}(\overline{F^t} X)$ $(X, F \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}))$.

Тогда для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

непосредственным решением задачи оптимизации получаем, что

$$p(A, X) = 2\sqrt{3}, \ p(B, X) = \sqrt{21}, \ p(A+B, X) = 9.$$

Таким образом,

$$p(A+B, X) > p(A, X) + p(B, X).$$

Литература

1. Novikov A.A, Tikhonov O.E., *Characterization of central elements of operator algebras by inequalities* // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36. – № 2. – P. 208-210.

2. Novikov A. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity. – 2017. – V. 21. – № 1. – P. 359–375.

3. Trunov N.V., Sherstnev A.N. *Introduction to the theory of noncommutative integration* // Math. Sci. – 1987. – V. 37 – № 6. – P. 1504–1523.

4. Шерстнев А. Н. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории интегрирования* –М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2008. – 259 с.

GENERALIZATION OF L_1-SEMINORM

An.An. Novikov, Z.Sh. Holmatova

In this paper we consider generalization of L_1-seminorms associated with operators affiliated with von

Neuman algebra and with weights on von Neuman algebras.
Keywords: partialy ordered vector space, order, noncommutative integration, duality.

УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ЛАКУНАРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В.В. Новиков[1]

1 *vvnovikov@yandex.ru*; Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина, Энгельсский технологический институт (филиал)

Показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице равноотстоящих узлов $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1) : -n \le k \le n,\ n = 1,2,\dots\}$, такая что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C_{2\pi}$ на множестве как угодно малой меры (0,2,3)–интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции равномерно на $[-\pi,\pi]$.

Ключевые слова: лакунарная интерполяция, ряды Фурье, исправление функций.

Обозначим через $L_n(T,f,x)$, $n = 1,2,\dots,$ тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$, а через $Q_n(T,f,x)$, $n = 1,2,\dots,$ (0,2,3)–интерполяционный полином Биркгофа такой, что

$$Q_n(T,f,x_{k,n}) = f(x_{k,n}),\ Q_n''(T,f,x_{k,n}) = Q_n'''(T,f,x_{k,n}) = 0,\ k = \overline{-n,n}.$$

Хорошо известно [1], что интерполяционный процесс $\{L_n(T,f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ для $f \in C_{2\pi}$ может расходиться при всех $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время, известно (см., напр. [2]), что любую измеримую (конечную п. в.) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (усиленное C-свойство, по терминологии Н.К. Бари). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к тому или иному интерполяционному процессу? В настоящей заметке показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице равноотстоящих узлов $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1) : -n \le k \le n,\ n = 1,2,\dots\}$, такая что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C_{2\pi}$ на множестве как угодно малой меры (0,2,3)–интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции g равномерно на $[-\pi,\pi]$.

Теорема. *Пусть последовательность $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{k,n}\}_{k=-n,n=1}^{n,\infty}$ со следующими свойствами:*

1) $|x_{k,n} - y_{k,n}| < \gamma_n$, $-n \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) для любых $f \in C_{2\pi}$, и $0 < \delta < 2\pi$ найдутся функция $g \in C_{2\pi}$ и множество $E \subset [-\pi,\pi]$, $\operatorname{mes} E > 2\pi - \delta$ такие, что $f = g$ на E и $\lim\limits_{n\to\infty} \left|Q_n(\mathfrak{M}_\gamma, g,\cdot) - g\right|_{C_{2\pi}} = 0.$

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые обозначения и леммы. Пусть $f \in C_{2\pi}$, $n \ge 3$, и $\mathfrak{M} :\ -\pi < y_{-n,n} < y_{-n+1,n} < \ldots < y_{n,n} < \pi -$